CARLO FELICE MANARA

Università di Modena

Questioni di esistenza di curve algebriche piane con caratteri assegnati

Conferenza tenuta il 27 febbraio 1953

SUNTO. — *Si espongono le questioni riguardanti la effettiva esistenza di curve algebriche piane aventi dati caratteri plückeriani ed alcuni procedimenti atti alla soluzione delle questioni stesse.*

1. — L'argomento di questa conferenza è tratto dalle ricerche più antiche di Geometria Algebrica, e precisamente dalla Teoria delle curve algebriche piane. Ho voluto scegliere questo argomento anche perchè, stando a ciò che si sente dire, pare che questo campo, già coltivato dai nostri predecessori, sia ormai isterilito.

Penso invece che sia un campo ancora fertile di problemi delicati, che richiedono un intenso lavoro per essere risolti.

Tutti sanno che cosa si intende dire quando si parla di « curva algebrica piana »: è l'insieme delle coppie dei valori di due variabili complesse x ed y che soddisfano ad una equazione algebrica, ottenuta eguagliando a zero un polinomio

$$f(x, y) = 0 . \tag{1}$$

Noi ci esprimeremo in linguaggio geometrico, che ha il vantaggio di essere suggestivo ed anche preciso, quando sia usato con le dovute precauzioni. Così invece di parlare di una coppia di valori x ed y parleremo di un punto di un piano, interpretando tali valori, anche se complessi, come le coordinate di un punto in un piano nel quale siano stati fissati due assi cartesiani.

È noto che la equazione (1) può esser messa in forma omogenea, ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_3} ; \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

ed ottenendo di conseguenza la (1) nella forma

$$(1)^* \qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dove f è un polinomio omogeneo nelle tre variabili.

Indicheremo con uno stesso simbolo f la curva ed il polinomio che, uguagliato a zero, fornisce la equazione della curva stessa (polinomio che è ovviamente definito soltanto a meno di un fattore moltiplicativo costante); e fino ad esplicito avviso contrario supporremo che la curva f sia irriducibile, cioè che il polinomio f non possa esprimersi come prodotto di due altri polinomii in x ed y, nella forma

$$f = f_1 \cdot f_2 .$$

Come è noto, la curva f può esser considerata come inviluppo di tangenti oltre che come luogo di punti e possiede certi caratteri — espressi da numeri interi — che sono invarianti proiettivi (cioè sono comuni alla f e ad ogni curva ottenuta da f con una omografia).

Tali caratteri numerici sono anche detti « caratteri plückeriani » perchè tra essi intercedono certe relazioni che sono note come « formule di Plücker ». Si chiamano di solito caratteri plückeriani fondamentali i sei seguenti:

1) — l'ordine della curva: n;

2) — la classe, carattere duale del precedente: m;

3) — il numero dei nodi: δ;

4) — il numero delle tangenti doppie, carattere duale del precedente: τ;

5) — il numero delle cuspidi: k;

6) — il numero delle tangenti di flesso, carattere duale del precedente: i.

Le singolarità che abbiamo ora nominate, cioè i nodi e le cuspidi, le tangenti doppie e le tangenti di flesso vengono anche chiamate col nome comune di singolarità elementari; una curva può possedere singolarità molto più complicate, ma queste ultime possono sempre essere considerate come casi limiti di singolarità elementari.

Come abbiamo detto, tra i caratteri che abbiamo nominato intercedono delle relazioni che vengono chiamate formule di Plücker;

tutte queste relazioni possono esser dedotte dalle tre seguenti, indipendenti tra loro:

$$m = n\,(n-1) - 2\,\delta - 3\,k \tag{2}$$
$$n = m\,(m-1) - 2\,\tau - 3\,i \tag{3}$$
$$i = 3\,n\,(n-2) - 6\,\delta - 8\,k. \tag{4}$$

Ne consegue che soltanto tre fra i caratteri plückeriani fondamentali di una curva possono venir assegnati ad arbitrio.

Tra le formule che possono esser dedotte dalle tre che abbiamo ora scritto, hanno particolare importanza le due seguenti:

$$(n-1)\,(n-2)/2 - (\delta + k) = (m-1)\,(m-2)/2 - (\tau + i) \tag{5}$$
$$n\,(n+3)/2 - \delta - 2\,k = m\,(m+3)/2 - \tau - 2\,i. \tag{6}$$

Consideriamo anzitutto la (5); essa è autoduale, cioè i caratteri che figurano in un membro sono duali di quelli che figurano nei posti corrispondenti dell'altro. Il valore comune dei due membri della (5) è un carattere numerico della curva che viene chiamato genere ed indicato con p; tra le sue importanti proprietà ci interessano qui le due seguenti:

1) — mentre i caratteri indicati sono tutti invarianti per omografie, il genere è invariante anche per trasformazioni appartenenti ad un gruppo più ampio, cioè trasformazioni birazionali;

2) — il genere di una curva irriducibile è necessariamente non negativo.

Consideriamo in secondo luogo la equazione (6); anch'essa è autoduale, ed il valore comune dei suoi due membri viene indicato col nome di « dimensione virtuale » del sistema continuo di tutte le curve piane che hanno in comune con f gli stessi caratteri plückeriani [1]. La ragione dell'aggettivo « virtuale » sta nel fatto che quel carattere dà la differenza tra il numero dei parametri da cui dipende la equazione di una curva f di ordine n ed il numero di equazioni che si scrivono per imporre che la curva stessa possegga δ nodi e k cuspidi; nel caso — non sempre verificato — in cui le equazioni suddette siano tutte indipendenti tra loro, la dimensione virtuale coin-

---

[1] B. SEGRE — *Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane con dati caratteri* — Rend. Lincei — Serie VI vol. 10 (1929).

cide con la dimensione effettiva del sistema di tutte le curve aventi in comune con f i caratteri plückeriani.

2. — Dato il significato geometrico che posseggono i caratteri plückeriani fondamentali di una curva, appare evidente che essi debbano essere sempre non negativi per una curva irriducibile di ordine $n \geq 2$.

Sorge quindi il problema della discussione aritmetica delle formule di PLÜCKER, discussione che ha il fine di precisare i limiti entro cui possono essere assegnati i valori di tre fra i caratteri plückeriani (ordinariamente n, δ, k) perchè tutti gli altri, dedotti in base alle formule, risultino non negativi.

Non ci fermeremo a parlare di tale discussione la quale anche se in pratica può essere tediosa, è concettualmente molto semplice. Invero basta ricordare quanto abbiamo detto poco fa a proposito del genere p; questo per una curva irriducibile deve essere sempre non negativo e quindi dalla relazione

$$p \geq 0$$

si trae la

$$\delta + k \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Di conseguenza per ogni valore dell'ordine n possono presentarsi soltanto un numero finito di scelte per i valori di δ e di k.

Per brevità diremo che una curva per la quale siano non negativi tutti i caratteri fondamentali ed il genere è « aritmeticamente possibile ».

Sorge ora il problema molto delicato di decidere a quali ulteriori condizioni debba soddisfare una curva aritmeticamente possibile per aver anche effettiva esistenza. Invero già alla fine dello scorso secolo si osservò che possono darsi dei gruppi di numeri interi non negativi che soddisfano alle formule di PLÜCKER senza che esista nessuna curva che li ammetta come caratteri plückeriani. O. ZARISKI ha dimostrato la non esistenza di una curva per cui è $n = 8$, $\delta = 0$, $k = 16$ (2).

Tuttavia è capitato a vari Geometri di dare degli esempi errati: si affermò per es. la non esistenza di una curva per la quale sia $n = 6$, $\delta = 1$, $k = 7$, la quale invece si costruisce molto facilmente come

(2) O. ZARISKI — *On the non existence of curves of order 8 with 16 cusps* — Amer. Journ. of Math. — 53 (1931).

proiezione del contorno apparente di una superficie cubica avente un punto doppio conico ed uno biplanare.

La difficoltà di questi problemi sta nel fatto che per imporre che una curva f abbia un nodo in posizione non assegnata occorre scrivere una condizione che si esprime in una forma analitica non facilmente maneggevole se l'ordine della curva è appena maggiore di quello che si può presentare nei primissimi casi.

Infatti per imporre che una curva f abbia un nodo in posizione non assegnata occorre scrivere per es. che la rete delle sue prime polari ha un punto base, il che è equivalente ad imporre che le tre curve aventi equazioni (in coordinate omogenee)

$$\frac{\delta f}{\delta x_1} = 0 \qquad \frac{\delta f}{\delta x_2} = 0 \qquad \frac{\delta f}{\delta x_3} = 0$$

hanno un punto in comune.

Ciò porta a scrivere una equazione che lega i coefficienti della curva, ma richiede calcoli di eliminazione molto pesanti.

Se poi ulteriormente si vuole imporre che il punto doppio che così si ottiene è una cuspide occorre aggiungere un'altra equazione.

Comunque, se si immagina di avere scritto tutte le equazioni che traducono le condizione imposte alla curva, la discussione del sistema così ottenuto è molto difficile; possono invero presentarsi due circostanze:

a) anzitutto i sistemi di curve che si ottengono imponendo determinate condizioni possono essere molti e distinti pur avendo dimensioni uguali tra loro.

b) in secondo luogo le equazioni che si scrivono possono non essere tutte indipendenti.

Sono stati dati esempi in cui le circostanze che abbiamo citate si presentano effettivamente e quindi la loro considerazione non ha carattere di sottigliezza critica ma è strettamente necessaria.

Per quanto riguarda la circostanza *a*) si ha l'esempio delle curve per le quali è $n = 6$, $\delta = 0$, $k = 6$ delle quali si sa che costituiscono almeno due sistemi distinti: l'uno contiene tutte le curve aventi le sei cuspidi su una conica, gli altri contengono le rimanenti. La equazione di una curva del primo sistema si scrive molto semplicemente nella forma

$$p^3 + q^2 = 0$$

essendo p una conica e q una cubica.

È stato poi dimostrato che esistono curve degli altri sistemi [3], e di una (che io sappia) è stata scritta anche la equazione [4].

Tuttavia, per quanto riguarda problemi di questo tipo, sussiste un fondamentale teorema di F. SEVERI il quale afferma che le curve di un dato ordine prive di cuspidi formano un unico sistema continuo. In base a questo teorema possiamo quindi assicurare che le eventuali complicazioni che conducono al verificarsi della circostanza *a*) si possono avere soltanto per le curve che posseggono delle cuspidi.

Per quanto riguarda il fatto *b*) notiamo che già nello scorso secolo si sospettò che esso potesse verificarsi, e precisamente in occasione delle critiche le quali vennero elevate ad un ragionamento con cui L. CREMONA pensava di poter dimostrare la formula (6). Infatti se la dimensione effettiva del sistema di tutte le curve che hanno in comune con una data f i caratteri plückeriani fosse sempre uguale alla virtuale, la formula (6) sarebbe di evidenza immediata, per il significato dei suoi due membri.

Come abbiamo detto, il ragionamento venne criticato obbiettando che per la sua validità sarebbe necessario provare ulteriormente l'identità delle due dimensioni, effettiva e virtuale.

Molto tempo dopo, B. SEGRE diede un effettivo esempio in cui ciò non avviene [5]. Egli considerò il sistema di tutte le curve la cui equazione è la seguente

$$[p_{2\mu}]^3 + [q_{3\mu}]^2 = 0.$$

Per le curve di questo sistema si ha $n = 6\mu$ e $k = 6\,\mu^2$; quindi, se valesse il ragionamento che abbiamo esposto sopra, il sistema dovrebbe avere dimensione

$$6\,\mu\,(6\,\mu + 3)/2 - 2 \cdot 6\,\mu^2 = 6\,\mu^2 + 9\,\mu.$$

Si verifica invece che la dimensione è data da

$$\frac{13\,\mu^2 + 15\,\mu + 2}{2}$$

numero che è maggiore del precedente se è $\mu \geq 3$.

---

(3) B. SEGRE — Loc. cit. in (1).

(4) M. VILLA — *Sulle curve piane del VI ordine dotate di sei cuspidi non appartenenti ad una conica* — Rend. Ist. Lomb. 65 (1932).

(5) B. SEGRE — Loc. cit. in (1).

3. — Non esistono criterii del tutto generali che possano garantire della esistenza (oppure della non esistenza) di una curva algebrica avente dati caratteri plückeriani. Risultati di vasta portata in questo senso sono stati ottenuti da B. SEGRE ([6]) in base a ragionamenti sui quali torneremo in seguito.

Esistono tuttavia dei procedimenti che permettono di costruire varii tipi di curve con singolarità assegnate; uno di questi procedimenti è la trasformazione.

Indicheremo qui tre tipi di trasformazione che ci interessano per il nostro scopo. Si hanno anzitutto le trasformazioni birazionali tra due piani; e poichè è noto che ogni trasformazione cosiffatta si può ottenere mediante trasformazioni quadratiche, possiamo dire che queste ultime costituiscono lo strumento basilare in procedimenti di questo tipo. È noto che mediante trasformazioni quadratiche si riesce a sciogliere le singolarità di una curva; appare quindi evidente che, opportunamente applicate, le trasformazioni stesse possano servire a creare le singolarità.

Un secondo tipo di trasformazioni è fornito dalle trasformazioni birazionali tra curve, non estendibili come tali ai piani o in generale agli spazi lineari in cui le curve sono contenute.

Una prima trasformazione di questo tipo, molto semplice, è la trasformazione per dualità. Essa garantisce della esistenza di una curva avente caratteri uguali ai duali di una curva esistente. Infatti sappiamo che le coordinate plückeriane u e v della tangente ad una curva in un suo punto P sono funzioni razionali delle coordinate di P e viceversa; sussiste quindi una corrispondenza birazionale tra gli elementi della curva considerata come luogo di punti e gli elementi della stessa considerata come inviluppo di tangenti.

Una seconda trasformazione di questo tipo è quella che si ottiene proiettando su un piano π una curva gobba γ da un centro O. Detta γ' la proiezione, è noto che le corde di γ passanti per O dànno luogo a nodi di γ' e le eventuali tangenti di γ per O dànno luogo a cuspidi di γ'. Inoltre la somma $\delta + k$ è costante per γ', comunque si scelga O nello spazio, fuori di γ. Si può quindi scegliere opportunamente O in modo che la γ' abbia un numero elevato di cuspidi. Un caso particolare importante si ha quando γ sia il luogo dei punti di contatto delle tangenti mandate da O ad una superficie algebrica (che può passare o non passare per O).

([6]) B. SEGRE — Loc. cit. in ([1]).

Si riesce in tal modo a dimostrare la esistenza di una curva per la quale è $n = 8$, $\delta = 2$, $k = 14$ (7).

Infine un terzo tipo di trasformazioni è dato dalle trasformazioni semplicemente razionali tra due piani π e π'.

Detta T una trasformazione cosiffatta, essa è tale che ad un punto P di π fa corrispondere un unico punto P' di π' mentre la T^{-1} fa corrispondere a P' un certo numero ν (maggiore di uno) di punti di π, tra i quali si trova P'.

Esiste in π' una curva J (curva di diramazione della corrispondenza) che è il luogo dei punti P' tali che i loro corrispondenti in π nella T^{-1} non sono tutti distinti.

Ad una curva φ' di ordine n in π' corrisponde in generale una curva φ di ordine $\nu\, n$ in π; e si verifica che, se la φ' ha un punto di contatto semplice con una parte semplice di J, la φ possiede in corrispondenza un nodo, e se φ' ha una osculazione tripunta con una parte semplice di J la φ possiede in corrispondenza una cuspide.

Con un procedimento di questo ultimo tipo si riesce a costruire una curva per cui è $n = 8$, $\delta = 0$, $k = 15$ (8); curva la cui esistenza può essere dimostrata anche con ricorso ad uno dei metodi esposti sopra.

Talvolta il punto più delicato in ragionamenti di questo tipo si presenta quando si tratta di garantire la effettiva irriducibilità delle curve che si ottengono.

Ora si noti che l'accertarsi della irriducibilità di una curva che è stata costruita può anche servire per garantirsi che essa non possegga singolarità oltre a quelle che le sono state imposte: invero il problema di costruire una curva con dati caratteri plückeriani viene abitualmente ricondotto a quello di costruire una curva per la quale n sia dato e δ e k abbiano certi valori; e questo secondo problema può assumere due aspetti ben distinti, perchè ci si può limitare a richiedere che δ e k abbiano *almeno* certi valori, oppure si può ulteriormente richiedere che abbiano *esattamente* quei valori. Ora quando le singolarità imposte ad una curva di ordine n equivalgono ad $(n-1)(n-2)/2$ punti doppi, la curva stessa non può possederne altre senza spezzarsi.

Indichiamo qui brevemente qualcuno dei procedimenti a cui si può far ricorso per dimostrare che una certa curva sia irriducibile.

---

(7) C. F. Manara — *Sulla esistenza di curve algebriche piane irriducibili aventi dati caratteri plückeriani* — Boll. U.M.I. Serie III — anno VI — (1951).

(8) R. Apéry — *Sur un procédé de définition de courbes ayant un nombre élevé de rébroussements* — C. R. Ac. Sci. Paris — T. 214 (1942).

Anzitutto se una curva C è generica in un sistema continuo $\{C\}$ di curve aventi gli stessi caratteri, allora esistono molti mezzi per garantire la sua irriducibilità; si può per es. constatare la irriducibilità di una curva particolare $\overline{C}$ del sistema ([9]); oppure si può dimostrare la irriducibilità di C partendo dall'esame dei modi di spezzamento delle eventuali curve riducibili contenute in $\{C\}$.

In particolare poi se $\{C\}$ è un sistema lineare si può far ricorso anche al classico teorema di BERTINI che stabilisce quali siano i soli modi in cui può spezzarsi la curva generica di un sistema cosiffatto.

4. — Il problema della esistenza di una curva algebrica di dati caratteri può essere affrontato anche con altri procedimenti, che si ricollegano alle dimostrazioni algebrico-geometriche del teorema di esistenza delle funzioni algebriche.

In questo ordine di idee B. SEGRE ([10]) è giunto a dare criteri di esistenza di vasta portata, come abbiamo già detto; noi non possiamo far altro qui che accennare ad alcune idee direttive dei ragionamenti che stanno alla base di dimostrazioni di questo tipo perchè troppo lungo sarebbe l'esporre esaurientemente e con rigore l'intera teoria.

Consideriamo la funzione algebrica $y(x)$ definita implicitamente dalla equazione $f(x, y) = 0$ della curva f. Potremo sempre supporre, senza ledere la generalità, che la curva f non passi per il punto improprio dell'asse delle y, cioè che la equazione della f possa scriversi esplicitamente nella forma

$$(7) \qquad a_0 y^n + a_1(x) y^{n-1} + a_2(x) y^{n-2} + \dots + a_n(x) = 0$$

e la $y(x)$ presenti di conseguenza n rami (e non meno).

Se la f non possiede parti doppie è sempre possibile scegliere un valore x_0 della x tale che la equazione (in y) $f(x_0, y) = 0$ abbia n radici distinte $y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)$.

È noto che in questa ipotesi esistono n elementi analitici regolari $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ convergenti in un cerchio del piano π_x della variabile complessa x avente centro nel punto x_0, i quali prendono, per $x = x_0$, i valori delle n radici della $f(x_0, y) = 0$ e rappresentano nel cerchio suddetto gli n rami della funzione algebrica $y(x)$.

Se prolunghiamo analiticamente questi elementi analitici lungo

---

([9]) Cfr. B. D'ORGEVAL — *A propos d'une surface du quatrième ordre* — Bull. Soc. Roy. de Sci. de Liège. — (1951) — ed anche C. F. MANARA — *Sur une démonstration d'irréductibilité* — ibid.

([10]) B. SEGRE — Loc. cit. in ([1]).

una curva Γ regolare, chiusa, che parta da x_0 e ritorni ad x_0 stesso, sappiamo che al ritorno possiamo ottenere una sostituzione tra i valori $y_i(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, quando la curva Γ racchiuda nel suo interno dei valori critici (o di diramazione) della funzione $y(x)$.

Tali valori critici vanno ricercati tra le radici della equazione

$$R(x) = 0 \tag{8}$$

che si ottiene uguagliando a zero il discriminante della equazione (7).

Ogni curva chiusa Γ può essere ridotta per continuità alla somma di un certo numero di curve chiuse elementari, dette cappi, ognuna delle quali circonda un unico punto critico della $y(x)$ e le sostituzioni che si ottengono effettuando il prolungamento lungo i cappi generano un gruppo, che viene detto il gruppo di monodromia della funzione $y(x)$. La condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva f sia irriducibile è che tale gruppo sia transitivo, cioè che esista in esso almeno una sostituzione che porti un valore $y_i(x_0)$ in un altro qualunque $y_k(x_0)$.

È subito visto che se un cappio avvolge una radice semplice x_1 della equazione (8), la corrispondente sostituzione *è* un semplice scambio tra due valori $y_i(x_0)$ ed $y_k(x_0)$; la equazione (in y) $f(x_1, y) = 0$ possiede allora una radice doppia e, dal punto di vista geometrico, la retta di equazione $x = x_1$ risulta essere una tangente semplice della curva f.

Invece se x_1 è radice doppia della (8) si possono presentare tre ipotesi:

a) la equazione $f(x_1, y) = 0$ ha due radici doppie distinte; allora la retta di equazione $x = x_1$ è una tangente doppia della curva f e gli scambi sui valori della funzione $y(x)$ che si ottengono in corrispondenza al cappio circondante x_1 sono disgiunti, cioè del tipo (12) (34);

b) la equazione $f(x_1, y) = 0$ ha una radice tripla; allora la retta di equazione $x = x_1$ è una tangente di flesso per la curva f e gli scambi sui valori della funzione $y(x)$ che si ottengono in corrispondenza al cappio che circonda x_1 hanno un elemento comune, cioè sono del tipo (12) (23);

c) la equazione $f(x_1, y) = 0$ ha una radice doppia; allora sulla retta $x = x_1$ si trova un nodo della curva f ed in corrispondenza al cappio circondante x_1 non si hanno scambi tra i valori della $y(x)$.

Ne consegue che si può imporre alla f di avere un nodo su una retta di equazione $x = x_1$ imponendo che la equazione (8) abbia la radice x_1 come doppia, purchè si abbia qualche cautela ulteriore, per es. si riesca a garantire che la equazione $f(x_1, y) = 0$ abbia una radice di molteplicità due (e non maggiore).

In modo analogo si può imporre che la curva f abbia una cuspide (con tangente generica) sulla retta $x = x_1$ imponendo che la equazione (8) abbia la radice x_1 tripla, purchè si abbia qualche cautela ulteriore, per es. si imponga che la equazione $f(x_1, y) = 0$ abbia *una* radice di molteplicità due (e non maggiore). Ed ancora, garantito che la equazione $f(x_1, y) = 0$ abbia *una* radice di molteplicità due (e non maggiore), si riesce ad ottenere che la curva f abbia sulla retta $x = x_1$ un tacnodo (con tangente generica) imponendo che la radice x_1 sia quadrupla per la equazione (8).

Consideriamo ora per es. una curva f che possegga un tacnodo. Supponiamo inoltre che le equazioni che si scrivono per imporre alla f le singolarità che essa possiede siano tutte indipendenti tra loro; con la nomenclatura introdotta da B. SEGRE ([11]) si esprime questo fatto dicendo che il sistema completo di tutte le curve che hanno gli stessi caratteri di f è regolare.

Le condizioni suddette possono essere state scritte imponendo che la equazione (8) abbia certe radici multiple $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ e garantendosi ulteriormente delle molteplicità delle radici delle corrispondenti equazioni nella y:

$$f(x_1, y) = 0, \quad f(x_2, y) = 0, \quad \ldots, \quad f(x_\mu, y) = 0.$$

Per es. nel caso in esame si saranno scritte certe equazioni che portano di conseguenza che la equazione (8) abbia una certa radice x_1 quadrupla e la equazione in $y : f(x_1, y) = 0$ abbia una radice doppia, e quindi la curva f abbia un tacnodo (con tangente generica) di ascissa x_1.

Poichè le condizioni scritte sono indipendenti per ipotesi, le condizioni che si scrivono per imporre che la radice suddetta sia soltanto tripla non portano di conseguenza che essa divenga quadrupla; per ottenere questo occorrerà una ulteriore condizione, e la soppressione di quest'ultima ci garantirà l'esistenza (a parità di altre condizioni) di un sistema di curve che, invece di un tacnodo, hanno semplicemente una cuspide.

Invero avremo in questo secondo sistema infinite curve vicine alla f, e tali che per esse le equazione (8) ha una radice x_1 tripla vicina quanto si vuole alla radice x_1; ed i rami della funzione $y(x)$

([11]) B. SEGRE — Loc. cit. in ([1]).

che tendono a coincidere quando x tende ad x_1 non potranno (per ragioni di continuità) essere più di due.

Ciò che fa la potenza di ragionamenti di questo tipo e permette di ottenere la dimostrazione dell'esistenza di vaste classi di curve, è il fatto che con essi si riesce a provare la esistenza di curve irriducibili a partire da forme limiti spezzate. Così per es. si riesce a provare la esistenza di curve per cui è $n = 5$, $\delta = 0$, $k = 5$ partendo da una curva spezzata in una quartica con tre cuspidi e nella (unica) bitangente.

Tuttavia sorgono anche su questa strada molte difficoltà quando si tenti di partire da forme limiti spezzate contenenti parti multiple, in particolare parti doppie. Queste difficoltà sono dovute al fatto che la questione ha un aspetto topologico il quale forse non è stato sufficientemente esaminato finora.

Invero l'imposizione di una determinata singolarità alla curva f si traduce nella imposizione di una determinata proprietà topologica alla superficie che rappresenta la totalità dei punti reali e complessi di f (superficie riemanniana di f) considerata immersa in uno spazio a quattro dimensioni.

Come è noto, si possono dare dei modelli del comportamento topologico di tale superficie mediante i mutui avvolgimenti di curve nello spazio ordinario tridimensionale ([12]). Ed appare molto probabile che un approfondito ulteriore esame di questo aspetto della questione possa portare, insieme con i procedimenti finora esposti, ad ampliare il campo delle nostre conoscenze su questi argomenti.

SUMMARY. — *The lecture deals with questions about the actual existence of plane algebraic curves having certain plückerian characters and records some proceedings for the solution of the same questions.*

([12]) Cfr. O. CHISINI — *Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane* — Rend. Ist. Lomb. (1933).
M. DEDÒ — *Algebra delle trecce caratteristiche; relazioni fondamentali e loro applicazioni* — Rend. Ist. Lomb. (1950).